

## 11 класс

## Первый день

- 11.1. На доске написано  $n$  различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем  $n$  это возможно?
- 11.2. Множество  $A$  состоит из  $n$  различных натуральных чисел, сумма которых равна  $n^2$ . Множество  $B$  также состоит из  $n$  различных натуральных чисел, сумма которых равна  $n^2$ . Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ .
- 11.3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузу  $AC$  опущена высота  $BH$ . На стороне  $BC$  отмечена точка  $D$ , на отрезке  $BH$  — точка  $E$ , а на отрезке  $CH$  — точка  $F$  так, что  $\angle BAD = \angle CAE$  и  $\angle AFE = \angle CFD$ . Докажите, что  $\angle AEF = 90^\circ$ .
- 11.4. Пусть  $p$  — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число  $y$ , меньшее  $p/2$  и такое, что число  $py + 1$  невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше  $y$ .
- 11.5. В таблице  $N \times N$  расставлены все натуральные числа от 1 до  $N^2$ . Число назовём *большим*, если оно наибольшее в своей строке, и *малым*, если оно наименьшее в своём столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел.

## 11 класс

## Первый день

- 11.1. На доске написано  $n$  различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем  $n$  это возможно?
- 11.2. Множество  $A$  состоит из  $n$  различных натуральных чисел, сумма которых равна  $n^2$ . Множество  $B$  также состоит из  $n$  различных натуральных чисел, сумма которых равна  $n^2$ . Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ .
- 11.3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузу  $AC$  опущена высота  $BH$ . На стороне  $BC$  отмечена точка  $D$ , на отрезке  $BH$  — точка  $E$ , а на отрезке  $CH$  — точка  $F$  так, что  $\angle BAD = \angle CAE$  и  $\angle AFE = \angle CFD$ . Докажите, что  $\angle AEF = 90^\circ$ .
- 11.4. Пусть  $p$  — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число  $y$ , меньшее  $p/2$  и такое, что число  $py + 1$  невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше  $y$ .
- 11.5. В таблице  $N \times N$  расставлены все натуральные числа от 1 до  $N^2$ . Число назовём *большим*, если оно наибольшее в своей строке, и *малым*, если оно наименьшее в своём столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел.